

Beschränktes Wachstum

Mathe > Digitales Schulbuch > Analysis > Wachstum > Beschränktes Wachstum

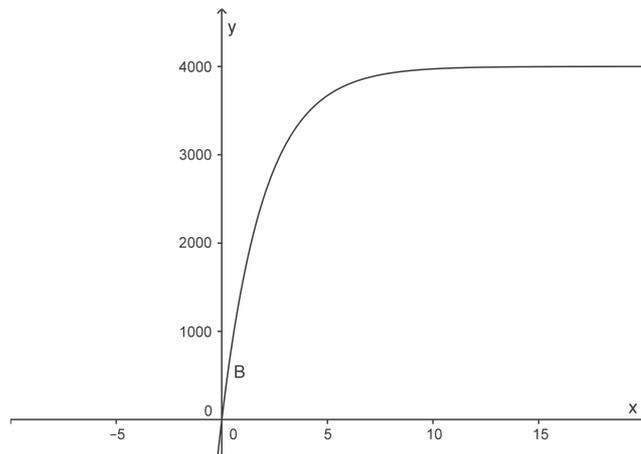
[Spickzettel](#)
 [Aufgaben](#)
 [Lösungen PLUS](#)
 [Lernvideos PLUS](#)

Beim beschränkten Wachstum handelt es sich um ein mathematisches Modell, welches durch eine natürliche Schranke nach oben oder unten begrenzt wird, diese wird oft auch als Kapazität oder Sättigung bezeichnet. Dieses Modell wird beispielsweise für Wachstumsprozesse des Marktanteils, die Populationsausbreitung in einem begrenzten Raum oder auch Erwärmungs-/Abkühlprozesse verwendet.

Modell

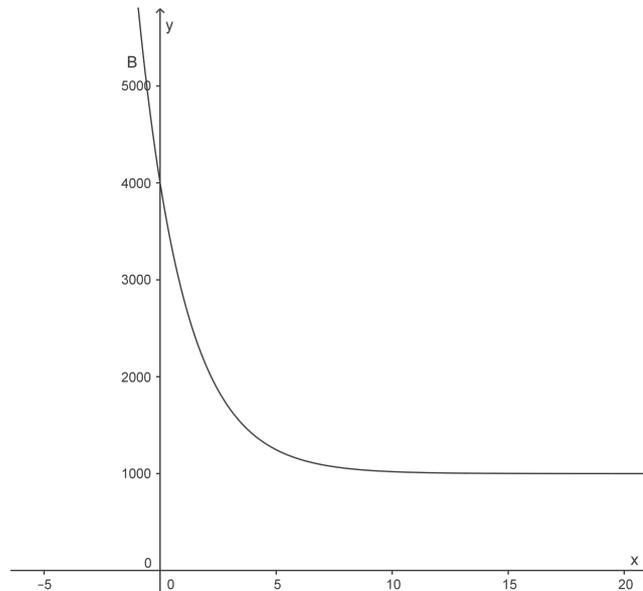
Das nach oben beschränkte Wachstum mit $S > B$ hat die allgemeine Gleichung:

$$B(t) = S - (S - B(0))e^{-kt} = S - ae^{-kt}$$



Das nach unten beschränkte Wachstum mit $S < B$ hat die allgemeine Gleichung:

$$B(t) = S + (B(0) - S)e^{-kt} = S + ae^{-kt}$$



Dabei gilt folgendes für die Parameter:

- t : Zeit
- $B(0)$: Anfangsbestand
- $B(t)$: Bestandsgröße nach t Zeitschritten
- S : natürliche Schranke
- k : Wachstumskonstante

Beispiel

Ein Verlag bringt in einer Stadt eine neue Zeitschrift auf den Markt. Die Stadt hat 4000 Haushalte und nach einer Woche sind 1436 Zeitschriften verkauft.

Der Verkauf der Zeitschrift soll als begrenztes Wachstum modelliert werden.

Zu Beginn ($t = 0$) des Verkaufs hat noch niemand diese Zeitschrift, ist $B(0) = 0$. Die Schranke (Sättigung) entspricht der Anzahl der Haushalte: $S = 4000$. Für die Anzahl der verkauften Zeitschriften wird folgende Funktion aufgestellt.

$$\begin{aligned}
 B(t) &= S - (S - B(0))e^{-kt} \\
 &= 4000 - 4000e^{-kt}
 \end{aligned}$$

Dabei ist t die Zeit in Wochen nach Verkaufsbeginn. Die Wachstumskonstante k kannst du mit der Anzahl der nach $t = 1$ Woche verkauften Zeitschriften berechnen:

$$\begin{aligned}
 1436 &= 4000 - 4000e^{-k \cdot 1} && | +4000e^{-kt}; -1436 \\
 4000e^{-k} &= 2564 && | : 4000 \\
 e^{-k} &= 0,641 && \ln \\
 -k &\approx -0,445 && | : (-1) \\
 k &\approx 0,445
 \end{aligned}$$

Die Wachstumsfunktion lautet somit: $4000 - 4000e^{-0,445t}$.

Der Verlag möchte gerne wissen, wann in 75% der Haushalte die Zeitschrift zu finden ist.

75% der Haushalte entspricht 3000 Haushalte. Es ist also der Zeitpunkt t gesucht, für den $B(t) = 3000$ gilt.

$$\begin{aligned} B(t) &= 3000 \\ 3000 &= 4000 - 4000e^{-0,445t} && | +4000e^{-0,445t}; -3000 \\ 4000e^{-0,445t} &= 1000 && | :4000 \\ e^{-0,445t} &= 0,25 && \ln \\ -0,445t &\approx -1,386 && | :(-0,445) \\ t &\approx 3,11 \end{aligned}$$

Nach ungefähr drei Wochen haben 75% der Haushalte die Zeitschrift gekauft.